Université de la Polynésie française **Année 2024-2025**
Département de Mathématiques **Licence 1 Maths et SPI**

Calcul intégral

Fiche 3[1] : Équivalents et développements limités

Exercice 1 Gestion des termes négligeables : Théorie
En revenant à la définition des petits o, montrer que, quand x tend vers 0,

- $o(x) + o(x) = o(x)$
- $2o(x^2) - 3o(x^3) = o(x^2)$
- $\frac{o(x)}{x} = o(1)$
- $x^2 = o(x)$
- $o(4x) = o(x)$
- $x \times o(x) = o(x^2)$
- $o(x^2) + o(x^3) = o(x^2)$
- $o(x^2) \times o(x^3) = o(x^5)$
- $o(x^2 + 2x^3) = o(x^2)$

Exercice 2 Gestion des termes négligeables : Calcul
Tous les termes négligeables sont à comprendre quand x tend vers 0. Simplifier les expressions suivantes en gardant le maximum d'informations utiles.

$$a(x) = x + 2x^2 - 3x^3 + o(x) \quad b(x) = (1 + x - x^2)(2 - x + 3x^2) + o(x^2)$$
$$c(x) = (1 - x + x^2 + o(x^2))^2 \quad d(x) = (x + x^3 + o(x^3))(1 - 2x + o(x))$$

Simplifier les expressions suivantes pour ne garder que l'ordre d'approximation $o(x^2)$.

$$e(x) = (1 + x)(1 - x^2 + 3x^3 + x^5) \qquad f(x) = (x + 2x^2 + o(x^2))^2$$
$$g(x) = (1 + x + o(x))(2x + 3x^2 + o(x^2)) \quad h(x) = (1 + x + x^2 + o(x^2))^3.$$

Exercice 3 Fonctions trigonométriques hyperboliques On introduit les cosinus hyperbolique

$$\mathrm{ch} : \mathbb{R} \to [1, +\infty[,\ x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et le et sinus hyperbolique

$$\mathrm{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Donner l'allure de leurs graphes.
2. Calculer la dérivée de chacune.
3. Donner leur développement limité en 0 à l'ordre 6.

[1] Feuille d'exercices de R. Joly (Grenoble)

Exercice 4 Calculer les développements limités suivant quand $x \to 0$ à l'ordre 4. et donner si possible la tangente et l'allure de la courbe de la fonction proche de 0.

1. $x \mapsto \cos x \ln(1+x)$	2. $x \mapsto \frac{\text{sh}x - x}{x^3}$
3. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$	4. $x \mapsto \text{ch}(2x)\text{sh}(3x)$
5. $x \mapsto \frac{1}{\cos x}$	6. $x \mapsto e^{\cos x}$
7. $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$	8. $x \mapsto \frac{1}{(\cos x)^3}$
9. $x \mapsto (\cos(x+x^2)^2$	10. $x \mapsto \frac{\cos x}{1+\sin x}$
11. $x \mapsto \frac{e^x}{(\cos x)^2}$	12. $x \mapsto \ln(\frac{\sin x}{x})$
13. $x \mapsto (\cos x)^{1+\sin x}$	14. $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
15. $x \mapsto \sqrt{1+\tan x}$	16. $16.x \mapsto \ln(1+x+\sqrt{1+x})$

Exercice 5 À la recherche d'un terme non nul
Trouver un équivalent simple de

$$f : x \mapsto \sin x - \cos x + \frac{1}{1+x}$$

quand x tend vers 0.

Exercice 6 Développements ailleurs qu'en zéro

1. $e^{\sqrt{x}}$ quand $x \to 1$ à l'ordre 3.	2. $\ln(1+x)$ quand $x \to 1$ à l'ordre 4
3. $\frac{\ln(x)}{x^2}$ quand $x \to 1$ à l'ordre 4.	4. $\ln(\sin x)$ quand $x \to \frac{\pi}{4}$à l'ordre 3.

Exercice 7 Calcul de limites

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(\frac{1}{1+x^2} - \cos x)$	2. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}(e^x - \cos x - \sin x)$	4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2 + x^4 \ln(\cos(\frac{1}{x})}$	6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}$

Exercice 8 Asymptotes Déterminer les asymptotes du graphe de chacune des fonctions suivantes en $\pm\infty$ (si définie) et étudier la position de la courbe par rapport à ses asymptotes.

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+1}, \quad g(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}, \quad h(x) = \ln(e^x - 1), \quad k(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}.$$